階段のスイッチ

西山豊

〒533-8533　大阪市東淀川区大隅 2-2-8　大阪経済大学　経営情報学部

Tel: 06-6328-2431　E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

１．　疑問は身近に

数学は役に立っている．ところがほとんどの人はそれに気づかない．たとえば，ここに階段のスイッチがある．図１は自作した階段のスイッチの模型である．夕方になり暗くなって２階へあがるときは，１階のスイッチで踊り場の灯りをつけて２階にあがる．あがってしまうと電灯は必要ないので２階のスイッチで灯りを消す．つまり１階でも２階でも灯りを点滅できるといったスイッチのことは誰しも経験のあることだろう．これは立派な数学の応用で，２進法の原理から考え出された工夫である．私たちの身の回りには数学の原理が応用されたものがたくさんある．ただ気づいていないだけである．階段のスイッチは確かに便利である．しかし，スイッチの原理などいちいち気にしだしたら生きていけない，と言うかもしれない．確かにそうかもしれない．しかし，数学は受験で生徒を苦しめるためにあるのではなく，私たちの生活をよくするためにあるのだということだけはわかって欲しい．

さて，この階段のスイッチ，いったいどうなっているのだろうか．最近はリモコンが大流行だから，リモコンだろうか．そうではない．また，暗くなるとセンサーが働いて自動的に点灯するものがあるが，そうでもない．私の世代が経験した<寝床スイッチ>のように１階のスイッチと２階のスイッチがつながっているのだろうか．漫画本を読みながらそろそろ眠ろうかというときに，立た

図１．階段のスイッチ（２階）

ずに消せるスイッチのヒモの工夫は活躍したが，そうでもない．電気の配線とスイッチの関係がそうなっているのだ．数学愛好家らしくエレガントに解答を求めてみたいものだ．１階のスイッチは２つの状態がある．２階のスイッチも２つの状態がある．灯りはついている，ついていない，の２つの状態がある．２つの状態は２進数と関係しそうに思えるので，ここではまず，２進数について計算問題を考えておこう．

２．2 進数と 16 進数

問１． 10 進数で 61 を 2 進数と 16 進数で表せ．

61 を２で割って商と余りを求める.61 割る２は，商が 30 で余りが１である．30 を２で割ると商が15で余りが0である.この作業を続けて，これ以上割り切れない，商が１になるまで右図のように計算の過程を記述していく．そして，太字の数字を矢印で示したように最後の商である１から始めて上に向かって余りの 11101 を読んでいく．つまり 111101 が 2 進数である．16 進数は 2 進数でいうと 4 桁分（4 ビット分）となる．なぜなら $2^4=16$ であるから．そこで，111101 を下位から 4 桁ずつ区切って 16 進数に変換すると容易にもとまる．11 と 1101 にわけると，11 は３であり，1101 はＤであるから，３Ｄが 16 進数表記である．

	余り
2) 61	
2) 30	**1**
2) 15	**0**
2) 7	**1**
2) 3	**1**
1	**1**

2 進数の由来は数字を表す文字，これは数詞（すうし）と呼ばれている，が０と１の２個であるからだ．２進数だから数字の２も含まれると思われるが，０を含めて１ですでに２文字使っているので，２は２進数に含まれない．10 進数は０から 9 までの 10 個の数詞を使って０から 9 までの数値をあらわす．16 進数の場合は，数字を表す文字が 16 個使える．10 個以上の数詞は英字のＡからＦまでが用いられている．10 進数の 10 はＡ，11 はＢ，12 はＣ，13 はＤ，14 はＥ，15 はＦである．そして 10 進数の 16 は 16 進数では 10（イチゼロ）とな

る．

　また 11 などを「じゅういち」などと言うと 10 進数の 11 と 2 進数の 11 に区別がつきにくいので，2 進数の場合は 1 を「イチ」，０を「ゼロ」，11 を「イチイチ」などと言うことが習慣的である．また，10 進数，2 進数，16 進数の数値であることを示すために数字の右下隅に 10，2，16 の数字を添え字で書くこともある．問 1 の答えはつぎのようになる．

$$61_{10} = 111101_2 = 3D_{16}$$

　答えを一方的に求めて，それが正しいかどうか吟味をしておくことも大切である．求めた 2 進数を 10 進数に戻す方法はつぎのようになる．

$$\begin{aligned} & 111101_2 \\ &= 1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = 32+16+8+4+0+1 \\ &= 61_{10} \end{aligned}$$

問２． ２進数の $A = 1011$ と $B = 111$ について加減乗除を計算せよ．

　２進数の四則演算はつぎのようになる．これらは 10 進数では $A = 11, B = 7$ とした場合の四則演算である．各自，確かめよ．

加	減	乗	除
$\begin{array}{r} 1011 \\ +111 \\ \hline 10010 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1011 \\ -111 \\ \hline 100 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1011 \\ \times 111 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ 1011 \\ \hline 1001101 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 111\overline{)1011} \\ 111 \\ \hline 100 \end{array}$

３．　ブール代数と真理値表

問３． １階でも２階でも点滅できる階段のスイッチの仕組みを考えよ．

　普通のスイッチは片切スイッチとよばれ，オンにすると灯りがつき，オフに

すると灯りが消える．しかし，階段のスイッチはオンとオフの区別がない．１階と２階のスイッチの関係が灯りの点滅を決定するのである．１階のスイッチをＡとし，２つの状態を０と１で表し，２階のスイッチをＢとし，２つの状態を０と１で表す．そのときの灯りの状態で消えているときを０，ついているときを１とする．スイッチＡとスイッチＢ，灯りは２つの状態しかないので，これは明らかに２進数の世界である．スイッチＡ，Ｂと灯りの関係を表１にまとめた．このような表を真理値表という．スイッチＡ，スイッチＢはそれぞれ２通りあるので，全体の組合せは$2 \times 2 = 4$通りである．

	(1)	(2)	(3)	(4)
A	0	1	1	0
B	0	0	1	1
灯り	1	0	1	0

表１．真理値表（２箇所スイッチ）

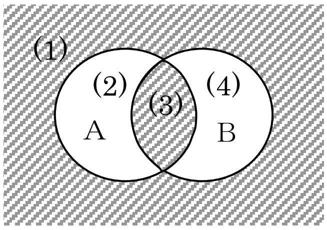


図２．ベン図（2 箇所スイッチ）

また，これをベン図で表現すると図２のようになる．灯りが１のときを斜線の領域で示した．ベン図はオイラー図とよばれることがある．このベン図で表された領域はスイッチＡとＢがともに０，ＡとＢがともに１のときで，そのとき灯りがつくのである．真理値表では(1)と(3)のときである．

これを論理式で書くとつぎのようになる．

灯り$= AB + \overline{A}\overline{B}$

ABはAとBの積を，＋は和を，$\overline{A}$はAの否定を，$\overline{B}$はBの否定を意味する．また，このような回路は一致回路とよばれている．一致回路はつぎに示すように排他的論理和（Exclusive OR，XOR）の否定でもある．

コンピュータは２進数を原理としてできている．また，電子回路は次の６つの基本回路で成り立っている．論理積（ＡＮＤ），論理和（ＯＲ），否定（ＮＯＴ），否定論理積（ＮＡＮＤ），否定論理和（ＮＯＲ），排他的論理和（ＸＯＲ）がそれである．四則演算(加減乗除)の基本は加算である．なぜなら掛け算は足し算の和として，割り算は引き算の和として計算されるからだ．そして，四則

演算の基本である加算はつぎの１桁の演算ですべてが表現される．

$$\begin{array}{r} 0 \\ +0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ \ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

この１桁の足し算を考えるとき，計算結果を保存する場所として〈和の位〉と〈桁上がりの位〉の２つの場所が必要である．和の計算は０と０は０，０と１は１，１と０は１，１と１は０の４パターンが同時に満たされねばならないし，桁上がりの計算は０と０は０，０と１は０，１と０は０，１と１は１の４パターンが同時に満たされねばならない．これを同時に満たすための加算回路は,〈和の位〉に排他的論理和（ＸＯＲ）の回路が，〈桁上がりの位〉には論理積（ＡＮＤ）の回路があれば十分である．ベン図を作成して各自，確かめること．

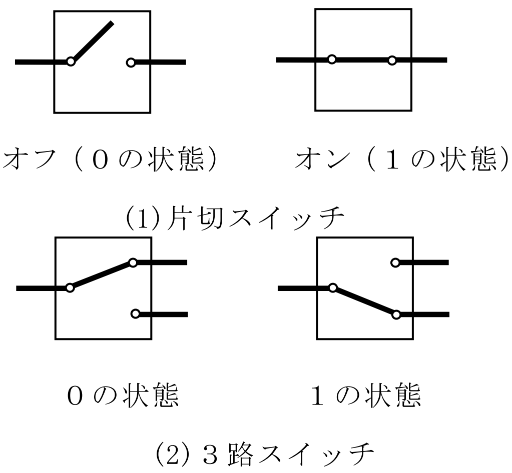


図３．片切スイッチと３路スイッチ

さて，排他的論理和と階段のスイッチである一致回路とは否定の関係であると言ったが，ここでは論理式で確かめておこう．A と B の排他的論理和は $A \oplus B$ のように表記される．排他的論理和 $A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$ は一致回路 $AB + \overline{A}\,\overline{B}$ の否定であることは，ド・モルガンの法則より式で証明することもできるし，ベン図からも明らかである．

$$\overline{AB + \overline{A}\,\overline{B}} = \overline{AB} \times \overline{\overline{A}\,\overline{B}} = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}})$$

$$= (\overline{A} + \overline{B})(A + B) = \overline{A}A + \overline{A}B + \overline{B}A + \overline{B}B$$

$$= A\overline{B} + \overline{A}B$$

２進数による演算は集合の論理演算に置き換えられ，これらは上記のようなブール代数として確立している．ブール代数は今日のコンピュータの基礎をなしているし，これを確立したジョージ・ブール(1854 年)の貢献は大きい．ただし彼はコンピュータの出現を知らない．数学は現実の 100 年先のことを行って

いるともいわれている．これは数学者のみが味わえるロマンというものだろうか．

さて，階段のスイッチの解答であるが，普通のスイッチである片切スイッチでは駄目であることに気づいておられるだろう．実際は３路スイッチというものが使われている（図３）．そして，スイッチＡとＢが０と０のとき，１と１のときというように，値が一致するときのみ灯りがつくのであるから，１階と２階の間には電線が１本ではなく２本引かれてあることになり，最終的な回路図は図４の通りとなる．

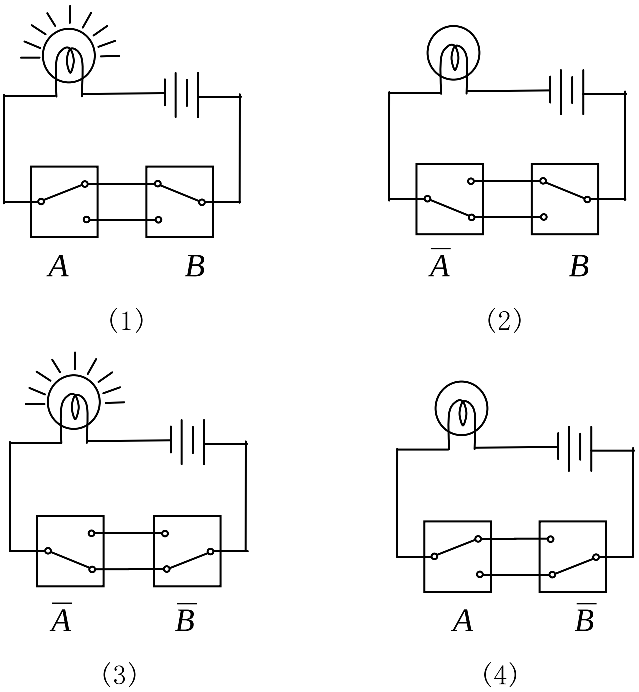


図４． ２箇所スイッチ（４つの組合せ）

４．　無限箇所も可能に

問４． ３箇所で点滅できるスイッチの仕組みを考えよ．

図５．階段のスイッチ（３階）

１階でも２階でも点滅できる階段のスイッチは非常に便利なものである．このよう

な工夫は２箇所だけでなく，３箇所あるいは５箇所でも可能で，実際にそのようなスイッチが実用化されている．ここでは，３箇所のスイッチについて考えてみよう．図５は自作した３階建ての家の階段のスイッチの模型である．

３箇所のスイッチをＡ，Ｂ，Ｃとし，この３つのスイッチの関係が灯りの状態を決めるとする．スイッチの状態はそれぞれ０と１の状態があるから，$2 \times 2 \times 2 = 8$通りの組合せがある．それらの組合せに対して，灯りがついているときを１，消えているときを０として，真理値表を作成すると表２になる．

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
A	1	1	1	1	0	0	0	0
B	1	1	0	0	1	1	0	0
C	1	0	1	0	1	0	1	0
灯り	0	1	1	0	1	0	0	1

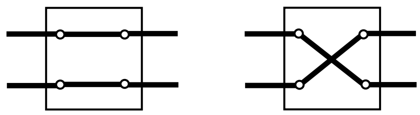
表２．真理値表（３箇所スイッチ）

これを論理式で示すと

灯り$= AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

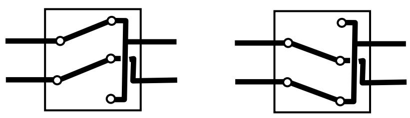
のようになる．これに対する回路を考えなければならないが，実際はAND回路やXOR回路などの電子回路ではなく，単純な機構である．灯りがついているのは(2)と(3)と(5)と(8)である．消えているのは(1)と(4)と(6)と(7)である．これらを比較してみると，$A+B+C$の値が偶数の場合はついていて，奇数の場合は消えているということである．$A+B+C$が奇数のとき灯りがつくとしても,機能的には同じである．

さて実際の回路についてである．まず，スイッチであるが，１階と３階のスイッチＡとＣは前に示した３路スイッチが使われている．２階のスイッチＢは４路スイッチというの



０の状態　　１の状態

(1) ４路スイッチ



０の状態　　１の状態

(2) ４路スイッチの実際

図６．４路スイッチ

が使われている．４路スイッチの０は平行な状態，１はクロスの状態としておく．クロスの状態は機構的に難しいので実際は図６(2)のようになっている．

３箇所スイッチがうまく作動しているかを図７にしたがい吟味しておこう．最初は灯りが消えているとする．スイッチA，B，Cは１，０，０の状態である(1)．つぎに，スイッチAでつける．スイッチA，B，Cは０，０，０の状態である(2)．つぎに,スイッチＢで消す.スイッチA，B，Cは０，１，０の状態である(3)．つぎに，スイッチＣでつける．スイッチA，B，Cは０，１，１の状態である(4)．そして，スイッチＢで消す．スイッチA，B，Cは０，０，１の状態である(5)．

３箇所スイッチの考え方は無限箇所に適用される．左右両端は３路スイッチで，真ん中をすべて４路スイッチとすれば 10 箇所でも 100 箇所でも点滅できる回路を作ることができる．このような回路が考案されたのはコンピュータ技術の副産物でもある[1]．

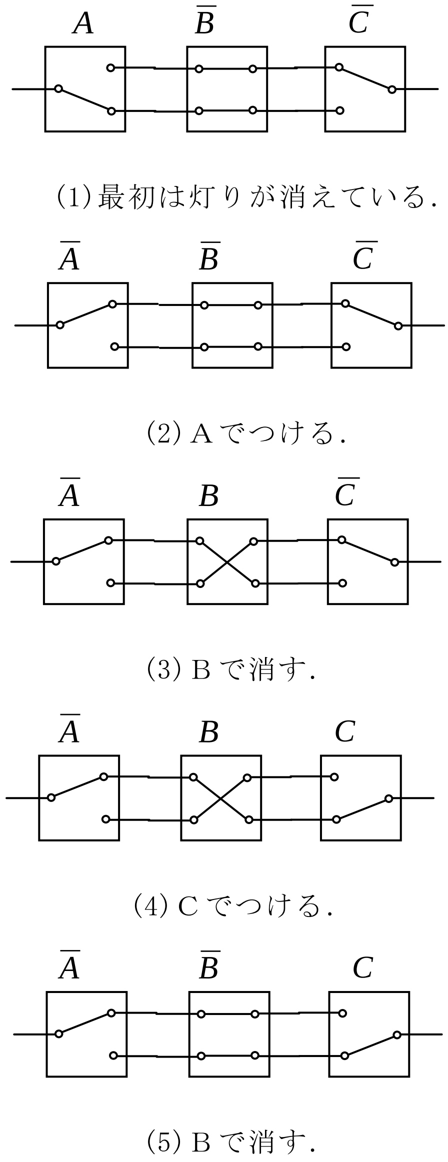


図７．３箇所スイッチの吟味

参考文献

(1) 西山豊「平等なスイッチ」『卵はなぜ卵形か』日本評論社，1986，127-144